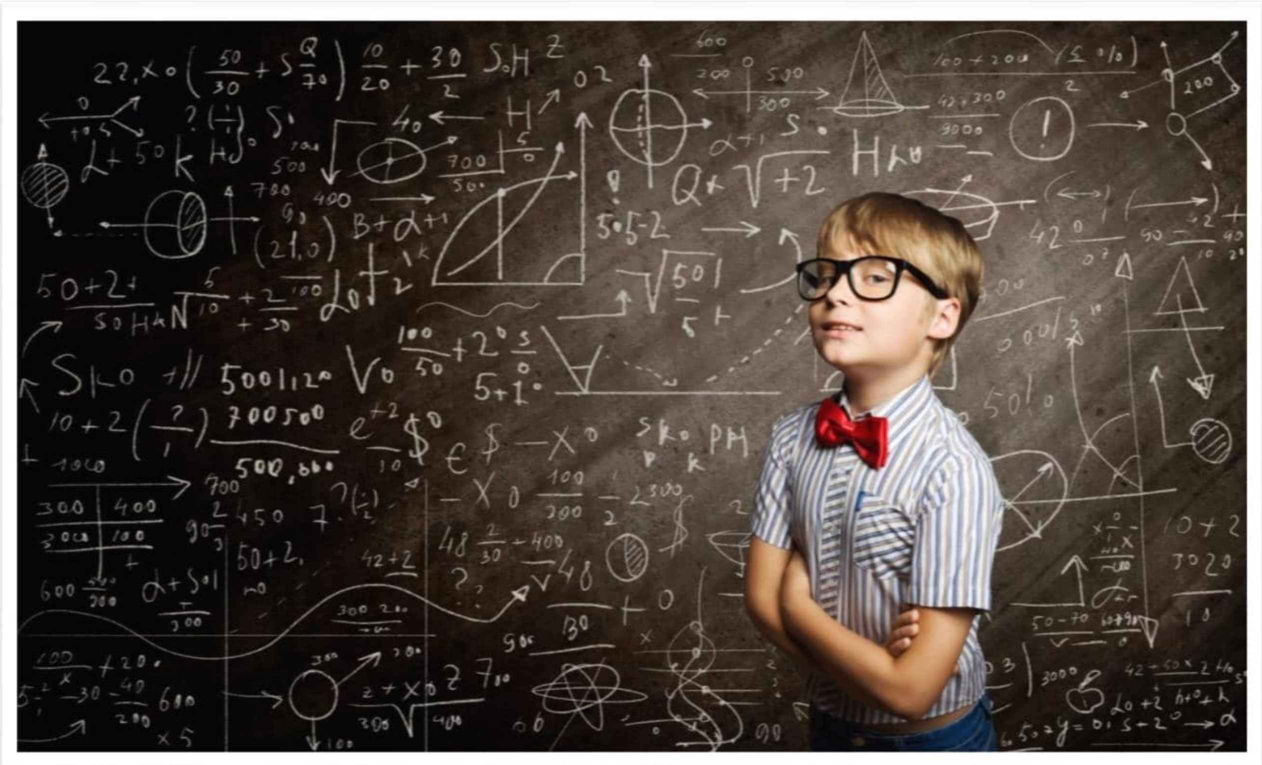
Муниципальное бюджетное образовательное учреждение средняя общеобразовательная школа № 3

Методика изучения логарифмических уравнений и неравенств

Методическое пособие



г. Армавир, 2025 год

УДК 372.851
ББК 74.02
З99

Рецензент:

Егизарьянц М.Н,, к. пед. н., доцент кафедры психологии и коррекционной педагогики ФГБОУ ВО «АГПУ»

Автор: Зябкина Анастасия Андреевна, учитель математики МБОУ-СОШ № 3 МО г. Армавир

Методика изучения логарифмических уравнений и неравенств.

Методическое пособие / Авт-сост. Зябкина А.А. - Армавир: 2025 г.- 47 стр.

Данное методическое пособие предназначено для педагогов, работающих с учащимися в области математического анализа и алгебры. Оно предлагает структурированный подход к преподаванию темы логарифмических уравнений и неравенств, учитывая особенности восприятия материала учащихся.

Методическое пособие помогает педагогам более эффективно преподавать тему логарифмических уравнений и неравенств как на уровне ООО, так и на уровне СОО. Методы и подходы изложенные в пособие способствуют более качественному усвоению учащимися сложной темы. Пособие поможет учителям развивать у учащихся аналитические и критические навыки, необходимые для успешного освоения математики.

Данное методическое пособие станет ценным ресурсом для педагогов, стремящихся повысить качество обучения и заинтересовать учащихся в изучении логарифмических понятий.

Содержание

Введение

Логарифмические уравнения и неравенства занимают важное место в школьном курсе алгебры и играют ключевую роль в формировании математического мышления у учащихся. Они представляют собой не только теоретический интерес, но и практическую ценность в различных областях науки и техники.

Изучение логарифмических уравнений и неравенств способствует развитию у учеников таких навыков, как логическое мышление, аналитика и способность к решению проблем. Эти темы требуют от учащихся умения работать с различными математическими концепциями, такими как степени, корни и, конечно, логарифмы, что делает их важным элементом общего математического образования.

Цели изучения логарифмических уравнений и неравенств:

Формирование понятий: Учащиеся должны понять, что такое логарифм, как он определяется и как соотносится со степенями.

Развитие навыков решения: Необходимо развивать умение решать логарифмические уравнения и неравенства различными методами, включая преобразование и использование свойств логарифмов.

Применение знаний: Учащиеся должны уметь применять полученные знания в практических задачах, что поможет им увидеть реальную ценность изучаемого материала.

Подготовка к экзаменам: Учитывая, что логарифмические уравнения и неравенства включены в экзаменационные материалы, важно подготовить учащихся к успешной сдаче ЕГЭ.

Математика, как наука, направлена на улучшение жизни человека, изучение окружающего мира и понимание его закономерностей. Теоретики и практики, занимающиеся математикой, разработали модели, которые выделяют ключевые характеристики природных явлений через математические зависимости и числовые выражения.

Одной из значимых тем школьного курса алгебры являются логарифмические уравнения и неравенства. Эти темы предлагают множество интересных и необычных методов решения, которые развивают рациональное мышление, память и познавательный интерес к математике. Несмотря на то что эта тема включена в материалы ЕГЭ (как для базового, так и для профильного уровней), многие учащиеся сталкиваются с трудностями при её изучении.

Цель методического пособия: рассмотреть методику изучения темы «Логарифмические уравнения и неравенства»

Задачи:

1. Рассмотреть основные понятия и виды логарифмических уравнений и неравенств и методы их решения;
2. Рассмотреть основные ошибки при решении логарифмических уравнений и неравенств и разработать методические рекомендации по их устранению.

Таким образом, методика изучения логарифмических уравнений и неравенств должна быть разнообразной и ориентированной на активное вовлечение учащихся в процесс обучения, что позволит им не только овладеть теоретическими знаниями, но и развить практические навыки, необходимые для успешной самореализации в будущем.

1.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Логарифмические уравнения и неравенства являются важной частью школьного курса математики, играя ключевую роль в развитии математического мышления и способности решать комплексные задачи. Понимание этих тем необходимо для дальнейшего изучения более сложных математических концепций и применения их в различных областях науки и техники.

Определение 1. Логарифмом положительного числа b по положительному и не равному единице основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad (a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0).$$

Примеры:

$\log_2 x = 5 \Leftrightarrow x = 2^5 \Leftrightarrow x = 32$; $\log_{25} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 25^{1/2} \Leftrightarrow x = \sqrt{25} \Leftrightarrow x = 5$.

Определение 2. Десятичным логарифмом называется логарифм по основанию десять:

$$\lg b = \log_{10} b.$$

Примеры:

lg10 = 1;

lg100 = 2, так как 102 = 100;

$$\lg x = 3 \Leftrightarrow x = 10^3 \Leftrightarrow x = 1000.$$

Определение 3. Основанием натуральных логарифмов называется число e, определенное замечательным пределом.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

или производной

$$\left(e^x\right)'=e^x.$$

Замечательное число е для математического анализа имеет такое же значение, как число π для геометрии. Основание натуральных логарифмов - число иррациональное и равно е = 2,71...

Определение 5. Логарифм по любому допустимому основанию от этого же числа равен единице:

$$\log_a a=1 \quad (a>0;\ a\neq 1) \text{ или } 1=\log_a a \quad (a>0;\ a\neq 1).$$

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени:

$$\log_a x^p = p\cdot\log_a x \text{ или } p\cdot\log_a x=\log_a x^p.$$

для любого действительного числа р.

6. Формула перехода от одного основания логарифма к другому основанию:

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}\ \ \text{или}\ \ \frac{\log_b x}{\log_b a}=\log_a x\ \ \left(x>0,\ a>0\ и\ a\neq 1,\ b>0\ и\ b\neq 1\right).$$

Следствие из формулы перехода:

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}\ \ \text{или}\ \ \frac{1}{\log_b a}=\log_a b$$

Первое свойства логарифмов следуют из определения логарифма и свойства степени с показателем 0 и 1: a0 = 1, значит, loga1= 0; a1 = a, значит, logaa = 1.

Докажем свойство 3. Воспользуемся основным логарифмическим тождеством ($a^{\log_a x} = x$) и свойством показательной функции (ax + y = ax ay).

Имеем

$$a^{\log_a(x\cdot y)} = xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Отсюда следует, что loga(xy) = logax + logay.

Докажем свойство 4. Вновь воспользуемся основным логарифмическим тождеством

$$x = a^{\log_a x},\ y = a^{\log_a y}.\ \ a^{\log_a \frac{x}{y}} = \frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y},$$

следовательно, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Докажем свойство 5. Воспользуемся тождеством $x = a^{\log_a x}$, откуда $x^p = \left(a^{\log_a x}\right)^p = \ = a^{p\cdot\log_a x}$(использовано свойство возведения в степень). Логарифмируя полученное равенство, имеем $\log_a x^p = p\cdot\log_a x$.

Докажем формулу перехода к другому основанию.

Воспользуемся основным логарифмическим тожеством ($x = a^{\log_a x}$):

$$\log_b x = \log_b\left(a^{\log_a x}\right);$$

применяя свойство логарифмирования степени ($\log_a x^p = p\cdot\log_a x$), получим

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Разделив обе части равенства на logba, имеем $\frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a x$.

§ 3 Логарифмическая функция, её свойства и график

Определение. Логарифмической функцией называется функция вида у

= logax, где a - заданное число, a > 0, $a \neq 1$.

Свойства логарифмической функции:

1. Областью определения логарифмической функции являются все положительные действительные числа: $D(y) = (0; \infty)$.

Это следует из определения логарифма числа b по основанию а:

logab имеет смысл, если b > 0.

2. Множеством значений логарифмической функции являются все действительные числа: $E(y) = (-\infty; \infty)$.

Пусть y0 - произвольное действительное число. Покажем, что найдется такое положительное значение аргумента x0, что выполняется равенство y0 = logax0. По определению логарифма числа имеем: $x_0 = a^{y_0}, a^{y_0} > 0$. Мы показали, что нашлось значение x0>0, при котором значение логарифмической функции равно y0 (y0 - произвольное действительное число).

3. Логарифмическая функция обращается в нуль при x = 1.

Решим уравнение logax = 0. По определению логарифма получаем: a0 = x, т. е. x=1.

4. а) Логарифмическая функция y = logax возрастает на всей области определения, если a > 1.

Докажем, что большему значению аргумента (x2 > x1) соответствует большее значение функции (logax2 > logax1), если a > 1. Пусть x2 > x1 > 0; тогда, используя основное логарифмическое тождество, запишем это неравенство в виде

$a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$. (1)

В неравенстве (1) сравниваются два значения показательной функции. Поскольку при a > 1 показательная функция возрастает, большее значение функции может быть только при большем значении аргумента, т. е. logax2 > logax1.

б) Логарифмическая функция y = logax убывает на всей области определения, если 0<a<1.

Свойство б) доказывается аналогично.

5. Логарифмическая функция y = logax:

а) при a > 1 принимает положительные значения, если x > 1; отрицательные значения, если 0 < x < 1.

б) при 0 < a < 1 принимает положительные значения, если 0 < x < 1, и отрицательные значения. если x > 1.

Пусть a > 1, тогда функция y = logax возрастает на всей области определения (рис.2); причем loga1=0.

Из этого следует, что: для x > 1, logax > loga1, т. е. logax > 0;

для 0 < x < 1, logax < loga1, т. е. logax < 0.

Пусть 0 < a < 1; тогда функция y = logax убывает на всей области определения (рис.2); причем loga1 = 0.

Из этого следует, что: для x > 1, logax < loga1, т. е. logax < 0;

для 0 < x < 1, logax > loga1, т. е. logax > 0.

. Логарифмическая функция непрерывна на всей области определения.

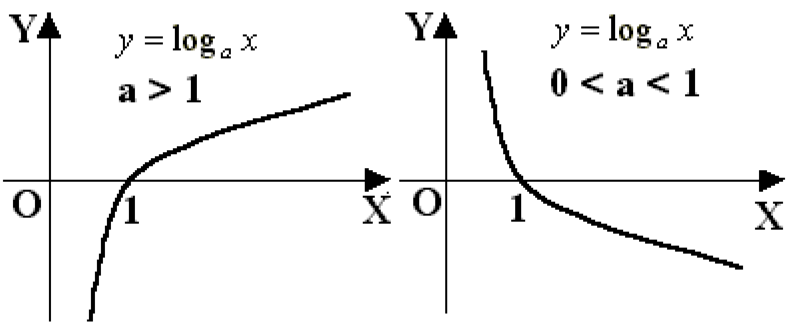


Рис. 3

§4. Тождественные преобразования логарифмических выражений на практике

Задание 1.

Вычислите:

.1) $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 - \log_5 2 + 2\log_{25} 3}$;

.2) $15\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt[5]{7}\cdot\frac{1}{49}\cdot 5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt[3]{49}}\right)$;

.3) $\lg tg1^\circ\cdot\lg tg2^\circ\cdot\lg tg3^\circ\cdot\ldots\cdot\lg tg88^\circ\cdot\lg tg89^\circ$.

Решение:

.1) $5^{\log_{\sqrt{5}}4-\log_5 2+2\log_{25}3}=5^{2\log_5 4-\log_5 2+\log_5 3}=5^{\log_5\frac{4^2\cdot 3}{2}}=\frac{16\cdot 3}{2}=24$;

.2) $15\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt[5]{7}\cdot\frac{1}{49}\cdot 5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt[3]{49}}\right)=15\log_{7^{-1}}\left(7^{\frac{1}{7}}\cdot 7^{-2}\cdot 5^{2\log_5 7^{\frac{2}{3}}}\right)=$

$=-15\left(\log_7 7^{-\frac{9}{5}}+\log_7 7^{\frac{4}{3}}\right)=-15\left(-\frac{9}{5}+\frac{4}{3}\right)=-15\cdot\frac{-7}{15}=7$;

.3) $\lg tg1^\circ\cdot\lg tg2^\circ\cdot\lg tg3^\circ\cdot\ldots\cdot\lg tg88^\circ\cdot\lg tg89^\circ=\lg tg1^\circ\cdot\ldots\cdot\lg tg45^\circ\cdot\ldots\cdot\lg tg89^\circ=$

$=\lg tg1^\circ\cdot\ldots\cdot\lg 1\cdot\ldots\cdot\lg tg89^\circ=\lg tg1^\circ\cdot\ldots\cdot 0\cdot\ldots\cdot\lg tg89^\circ=0$.

Ответ: 24; 7; 0.

Задание 2.

Найдите значение выражения:

.1) $\frac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}$;

.2) $2\log_{0,3}3-2\log_{0,3}10$;

.3) $\frac{3\lg 2+3\lg 5}{\lg 13-\lg 130}$;

.4) $(2\log_{12}2+\log_{12}3)(2\log_{12}6-\log_{12}3)$.

Решение:

.1) $\frac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}=\frac{\lg(8\cdot 18)}{\lg(2^2\cdot 3)}=\frac{\lg 144}{\lg 12}=\frac{\lg 12^2}{\lg 12}=\frac{2\lg 12}{\lg 12}=2$;

.2) $2\log_{0,3}3-2\log_{0,3}10=2(\log_{0,3}3-\log_{0,3}10)=2\log_{0,3}\frac{3}{10}=2\log_{0,3}0{,}3=2$;

.3) $\frac{3\lg 2+3\lg 5}{\lg 13-\lg 130}=\frac{3(\lg 2+\lg 5)}{-(\lg 130-\lg 13)}=-\frac{3\lg(2\cdot 5)}{\lg\frac{130}{13}}=-\frac{3\lg 10}{\lg 10}=-3$;

.4) $(2\log_{12}2+\log_{12}3)(2\log_{12}6-\log_{12}3)=$

$$=(2\log_{12}2+\log_{12}3)(2\log_{12}2+2\log_{12}3-\log_{12}3)=(2\log_{12}2+\log_{12}3)(2\log_{12}2+\log_{12}3)=$$

$$=(2\log_{12}2+\log_{12}3)^2=\left(\log_{12}2^2+\log_{12}3\right)^2=\left(\log_{12}(4\cdot 3)\right)^2=\log_{12}^2 12=1.$$

Ответ: 2; 2; -3; 1.

Задание 3.

Прологарифмируйте по основанию a выражение:

.1) $25b^3\sqrt[4]{c^7}$ при $a=5$;

4.2) $\dfrac{0{,}0016b^4}{c\sqrt[7]{c^2}}$ при $a=0{,}2$, $b>0$, $c>0$.

Решение:

.1) $$\log_5\left(25b^3\sqrt[4]{c^7}\right)=\log_5\left(5^2b^3\sqrt[4]{c^7}\right)=\log_5 5^2+\log_5\left(b^3\sqrt[4]{c^7}\right)=2\log_5 5+\log_5\left(b^3\sqrt[4]{c^7}\right)=$$

$$=2+\log_5 b^3+\log_5\sqrt[4]{c^7}=2+3\log_5 b+\frac{7}{4}\log_5 c;$$

.2) $$\log_{0,2}\frac{0{,}0016b^4}{c\sqrt[7]{c^2}}=\log_{0,2}\left(0{,}0016b^4\right)-\log_{0,2}\left(c\sqrt[7]{c^2}\right)=\log_{0,2}0{,}2^4+\log_{0,2}b^4-$$

$$-\log_{0,2}c^{\frac{9}{7}}=4+4\log_{0,2}b-\frac{9}{7}\log_{0,2}c.$$

Ответ: $2+3\log_5 b+\dfrac{7}{4}\log_5 c$; $4+4\log_{0,2}b-\dfrac{9}{7}\log_{0,2}c$.

Задание 4.

Найдите x, если:

.1) $\log_4 x=2\log_4 10+\dfrac{3}{4}\log_4 81-\dfrac{2}{3}\log_4 125$;

.2) $\log_{\frac{1}{3}} x=\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}16-\log_{\frac{1}{3}}8+\log_{\frac{1}{3}}28$.

Решение:

.1) $$\log_4 x=2\log_4 10+\frac{3}{4}\log_4 81-\frac{2}{3}\log_4 125$$

$$\log_4 x=\log_4 10^2+\log_4\left(3^4\right)^{\frac{3}{4}}-\log_4\left(5^3\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\log_4 x=\log_4 10^2+\log_4 3^3-\log_4 5^2$$

$\log_4 x = \log_4 \dfrac{10^2 \cdot 3^3}{5^2} \Leftrightarrow \log_4 x = \log_4 108 \quad \Rightarrow \; x = 108$;

5.2)

$\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 16^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{3}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} 28$

$\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 4 - \log_{\frac{1}{3}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} 28$

$\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{4 \cdot 28}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 14 \quad \Rightarrow \quad x = 14$. Ответ: 108; 14.

Задание 5.

Известно, что $\log_2(\sqrt{3}+1) + \log_2(\sqrt{6}-2) = A$. Найти $\log_2\left(\sqrt{3}-1\right) + \log_2\left(\sqrt{6}+2\right)$.

Решение:

$$\log_2\left(\sqrt{3}-1\right) + \log_2\left(\sqrt{6}+2\right) = \log_2 \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}+1} + \log_2 \frac{\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{6}-2\right)}{\sqrt{6}-2} =$$

$$= \log_2 \frac{3-1}{\sqrt{3}+1} + \log_2 \frac{6-4}{\sqrt{6}-2} = \log_2 \frac{2}{\sqrt{3}+1} + \log_2 \frac{2}{\sqrt{6}-2} = \log_2 2 - \log_2\left(\sqrt{3}+1\right) + \log_2 2 -$$

$$- \log_2\left(\sqrt{6}-2\right) = 1 - \log_2\left(\sqrt{3}+1\right) + 1 - \log_2\left(\sqrt{6}-2\right) = 2 - \left(\log_2\left(\sqrt{3}+1\right) + \log_2\left(\sqrt{6}-2\right)\right) = 2 - A.$$

Ответ: $2 - A$.

Логарифмы широко применяются в различных областях, включая:

- Науку: Моделирование процессов, таких как радиоактивный распад и рост населения.
- Финансы: Расчет сложных процентов и оценка кредитных рисков.
- Инженерия: Анализ сигналов и систем, работающих с экспоненциальными функциями.

Изучение логарифмических уравнений и неравенств должно включать:

- Пошаговые инструкции: Четкие алгоритмы для решения уравнений и неравенств.
- Практические примеры: Задачи, основанные на реальных ситуациях, чтобы показать применение логарифмов.

- Интерактивные методы: Групповые занятия и обсуждения для активного вовлечения учащихся.

Теоретические аспекты изучения логарифмических уравнений и неравенств формируют основу для дальнейшего освоения математики. Глубокое понимание логарифмов и их свойств помогает учащимся развивать критическое мышление и навыки решения проблем, что является необходимым для успешного освоения более сложных математических тем. Логарифмы, как важный инструмент в математике, открывают двери к новым знаниям и возможностям в различных сферах жизни, что подчеркивает их значимость в образовательном процессе.

1.2. ВИДЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Логарифмические уравнения представляют собой уравнения, в которых переменная находится под знаком логарифма. Решение таких уравнений требует использования различных методов и подходов. Рассмотрим основные виды логарифмических уравнений и методы их решения.

Логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестное находится под знаком логарифма или в основании логарифма.

Логарифмом числа $b(b>0)$ по основанию $a(a>0, a\neq 1)$ называется показатель степени x, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b, то есть из $a^x=b$ следует $x=\log_a b$ и наоборот.

Основные формулы.

1. $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x, a>0, a\neq 1, b>0.$
2. $\log_a 1 = 0$.
3. $\log_a a = 1.$
4. $\log_a a^c = c$ - запись числа через логарифм.
5. $a^{\log_a c} = c$ - основное логарифмическое тождество.

6. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ - формула перехода к логарифму по основанию c $(c > 0, c \neq 1)$.

7. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

8. $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$.

9. $\log_a (\dfrac{x_1}{x_2}) = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|$.

10. $\log_a x^{\alpha} = \alpha \cdot \log_a |x|$.

11. $\log_a b = \log_{a^{\alpha}} b^{\alpha}, \alpha \neq 0$.

12. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Основные методы решения логарифмических уравнений.

I. По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$.

Примеры.

Решить уравнение. 1) $\log_3 x(x-2) = 1$.

Решение. $x(x-2) = 3^1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ x_2 = -1. \end{array}\right.$

Проверка: $x = 3, \log_3 3(3-2) = \log_3 3 = 1$ верно;

$x = -1, \log_3 -1(-1-2) = \log_3 3 = 1$ верно.

Ответ: -1; 3.

2) $\log_{\sqrt{2}} (2^x + \log_3 x + 2) = 2x$.

Решение. По определению логарифма: $(\sqrt{2})^{2x} = 2^x + \log_3 x + 2.$ Получаем

$\log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 3^{-2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{9}$.

Проверка: $\log_{\sqrt{2}} (2^{\frac{1}{9}} + \log_3 \dfrac{1}{9} + 2) = \log_{\sqrt{2}} (2^{\frac{1}{9}} - 2 + 2) = \log_2 2^{\frac{2}{9}} = \dfrac{2}{9}$ верно.

Ответ: $\dfrac{1}{9}$.

Решить уравнения.

1) $\log_2 \sqrt{(1-x)^2} = 3$. Ответ: $\{-7; 9\}$.

2) $\log_3(x^2+4x+12)=2$. Ответ: $\{-1;-3\}$.

3) $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}$. Ответ: $\{0\}$.

4) $\log_3(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9})=\log_5 0{,}2$. Ответ: $\{10;3\}$.

5) $\log_{3\sqrt{3}} x=-\frac{2}{3}$. Ответ: $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

6) $\log_2 x^2=4.$ Ответ: $\{\pm 4\}$.

II. Метод потенцирования.

Сущность метода в следующем: с помощью формул уравнение привести к виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ Это уравнение (при $a>0, a\neq 1)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Примеры.

Решить уравнение.

1) $3\log_5 2+2-x=\log_5(3^x-5^{2-x})$.

Решение. ОДЗ (область допустимых значений переменной): $3^x-5^{2-x}>0(1)$. Преобразуем исходное уравнение

$$\log_5 2^3+\log_5 5^2-\log_5 5^x=\log_5(3^x-5^{2-x}),$$
$$\log_5\frac{8\cdot 25}{5^x}=\log_5(3^x-\frac{25}{5^x}),$$
$$\frac{200}{5^x}=3^x-\frac{25}{5^x}\Leftrightarrow 200=15^x-25\Leftrightarrow 15^x=15^2\Leftrightarrow$$

$x=2$ -удовлетворяет условию (1).

Ответ: $x=2$.

2) $\log_3(5-x)+2\log_3\sqrt{3-x}=1$.

Решение. ОДЗ $\begin{cases} 5-x>0, \\ \sqrt{3-x}>0 \end{cases}$ (2)

$$\log_3(5-x)+2\log_3\sqrt{3-x}=1\Leftrightarrow \log_3(5-x)+\log_3(3-x)=1\Rightarrow \log_3((5-x)(3-x))=1\Leftrightarrow$$

$$(5-x)(3-x)=3\Leftrightarrow x^2-8x+12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=6, \\ x_2=2. \end{array}\right.$$

$x=6$ не удовлетворяет ОДЗ, $x=2$ удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 2.

3) $\log_{\sqrt[3]{2}-1}(-x-3)+\log_{\sqrt[3]{2}-1}(-x)=2\log_{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}0{,}5.$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}-x-3>0,\\ -x>0.\end{cases}$

Найдем связь между основаниями логарифмов. По формуле разности кубов получаем

$$(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)=1\Leftrightarrow \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}=(\sqrt[3]{2}-1)^{-1}.$$

Таким образом

$$\log_{\sqrt[3]{2}-1}(-x-3)+\log_{\sqrt[3]{2}-1}(-x)=2\log_{\sqrt[3]{2}-1}0{,}5^{-1}\Rightarrow \log_{\sqrt[3]{2}-1}(-x-3)(-x)=\log_{\sqrt[3]{2}-1}4\Leftrightarrow$$

$x^2+3x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=1.\end{array}\right.$ Значение $x=-4$ удовлетворяет ОДЗ, $x=1$ не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: -4.

Решить уравнения.

1) $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3);$ Ответ: $\{2\}$.

2) $\lg(3x-2)-2=\frac{1}{2}\lg(x+2)-\lg 50;$ Ответ: $\{2\}$.

3) $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0;$ Ответ: $\{3;3+\sqrt{2}\}$.

4) $0{,}5\lg(2x-1)+\lg\sqrt{x-9}=1;$ Ответ: $\{13\}$.

5) $2\log_{5-2\sqrt{6}}(4-x)+\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}(-2-x)=\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}16;$ Ответ: $\{-4\}$.

6) $\log_{3-\sqrt{8}}(x^4-x^2-2x-2)=2\log_{3+\sqrt{8}}\frac{1}{1-x}.$ Ответ: $\{-\sqrt{3}\}$.

III. Метод введения неизвестного (подстановка).

Обычно замену (подстановку) производят после некоторых преобразований данного уравнения.

Примеры.

Решить уравнение. 1) $2\log_x 25-3\log_{25}x=1.$

Решение. ОДЗ $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ В первом слагаемом перейдем к основанию 25, воспользовавшись формулой $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$. Получим $\dfrac{2}{\log_{25} x} - 3\log_{25} x = 1$. Так как $x \neq 1$, т.е. $\log_{25} x \neq 0$, то умножив обе части уравнения на $\log_{25} x$, получим $2 - 3\log_{25}^2 x = \log_{25} x$. Введем новую переменную, обозначив $\log_{25} x = t$. Получим квадратное уравнение относительно нового неизвестного t:

$3t^2 + t - 2 = 0$. Решая его, находим $\left[\begin{array}{l} t_1 = -1, \\ t_2 = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$ Используя обозначение $\log_{25} x = t$, получаем $\left[\begin{array}{l} \log_{25} x = -1 \\ \log_{25} x = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{25} x = \log_{25} \dfrac{1}{25}, \\ \log_{25} x = \log_{25} 25^{\frac{2}{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{25}, \\ x = 25^{\frac{2}{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{25}, \\ x = 5\sqrt[3]{5}. \end{array}\right.$

Найденные значения удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\dfrac{1}{25}; 5\sqrt[3]{5}$.

2) $\lg^2 x^2 - 2\lg(-x) = 2$.

Решение. ОДЗ $\begin{cases} x \neq 0, \\ -x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$. $\lg^2 x^2 - 2\lg(-x) = 2 \Leftrightarrow 2\lg^2|x| - 2\lg(-x) = 2$. С учетом ОДЗ раскроем модуль, получим $2\lg^2(-x) - 2\lg(-x) = 2$. Обозначим $\lg(-x) = t$, приходим к квадратному уравнению $2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$ Тогда

$$\left[\begin{array}{l} \lg(-x) = 1 \\ \lg(-x) = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg(-x) = \lg 10 \\ \lg(-x) = \lg 10^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x = 10, \\ -x = 10^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -10, \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}. \end{array}\right.$$

Найденные значения удовлетворяют уравнению.

Ответ: -10; -$\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Решить уравнения.

1. $\lg(10x^2) \cdot \lg x = 1$. Ответ: $\left\{\sqrt{10}; \dfrac{1}{10}\right\}$.

2. $2\lg x^2 - \lg^2(-x) + 5 = 0$. Ответ: $\left\{-10^5; -10^{-1}\right\}$.

3. $\sqrt{2\log_8(-x)} - \log_8\sqrt{x^2} = 0.$ Ответ: $\{-64;-1\}$.

4. $\sqrt{2-\log_x 9} = -\dfrac{\sqrt{12}}{\log_3 x}.$ Ответ: $\left\{\dfrac{1}{9}\right\}$.

5. $\dfrac{1}{5-\lg x} + \dfrac{2}{1+\lg x} = 1.$ Ответ: $\{100;1000\}$.

IV. Метод приведения к одному основанию.

Обычно условие примера подсказывает, к какому основанию следует перейти. Часто метод приведения к одному основанию "работает" с методом подстановки.

Примеры. Решить уравнение.

1) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Перейдем к основанию 2, используя формулу $\log_a b = \log_{a^\alpha} b^\alpha$, получим

$\log_2 x + \log_{4^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}} + \log_{8^{\frac{1}{3}}} x^{\frac{1}{3}} = 11,$ $\log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_2 x + \dfrac{1}{3}\log_2 x = 11,$ обозначим $\log_2 x = t$, тогда

$t + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{3}t = 11,$ $\dfrac{11}{6}t = 11,$ $t = 6$. Значит, $\log_2 x = 6, x = 2^6 = 64.$

Найденное значение удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 64.

2) $20\cdot\log_{4x}\sqrt{x} + 7\cdot\log_{16x} x^3 - 3\cdot\log_{\frac{x}{2}} x^2 = 0$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq \dfrac{1}{4}, \\ x \neq \dfrac{1}{16}, \\ x \neq 2. \end{cases}$ Переходим к основанию 2, используя формулу $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Итак, $\log_{4x}\sqrt{x} = \dfrac{\log_2\sqrt{x}}{\log_2 4x} = \dfrac{\frac{1}{2}\log_2 x}{\log_2 4 + \log_2 x} = \dfrac{\frac{1}{2}\log_2 x}{2 + \log_2 x};$

$$\log_{16x} x^3 = \frac{\log_2 x^3}{\log_2 16x} = \frac{3\log_2 x}{\log_2 16 + \log_2 x} = \frac{3\log_2 x}{4+\log_2 x};\ \log_{\frac{x}{2}} x^2 = \frac{\log_2 x^2}{\log_2 \frac{x}{2}} = \frac{2\log_2 x}{\log_2 x - \log_2 2} =$$

$$\frac{2\log_2 x}{\log_2 x - 1};$$

Тогда исходное уравнение перепишется так

$\frac{10\log_2 x}{2+\log_2 x} + \frac{21\log_2 x}{4+\log_2 x} - \frac{6\log_2 x}{\log_2 x - 1} = 0$. Обозначим $\log_2 x = t$, получим уравнение

$$\frac{10t}{t+2} + \frac{21t}{4+t} - \frac{6t}{t-1} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 0, \\ \begin{cases} 25t^2 + 15t - 130 = 0, \\ t \neq -2, t \neq -4, t \neq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 0, \\ t_2 = 2, \\ t_3 = -2{,}6. \end{array}\right.$$ Тогда

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0, \\ \log_2 x = 2, \\ \log_2 x = -2{,}6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 2^{-\frac{13}{5}} = \frac{1}{4\sqrt[5]{8}}. \end{array}\right.$$

Найденные значения x удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: 1, 4, $\frac{1}{4\sqrt[5]{8}}$.

Решить уравнения

1) $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0.$ Ответ: $\left\{\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right\}$.

2) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5{,}5.$ Ответ: $\{27\}$.

3) $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} \cdot \log_5 x = -1.$ Ответ: $\left\{\frac{1}{25}\right\}$.

4) $\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1.$ Ответ: $\left\{\frac{1}{9}; 1; 3\right\}$.

5) $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0.$ Ответ: $\left\{\frac{1}{9}; 9\right\}$.

V. Метод логарифмирования.

Уравнения, содержащие неизвестную величину как в основании, так и в показателе степени, решают, логарифмируя левую и правую части по некоторому основанию. Основание логарифмирования выбирают по виду конкретного уравнения.

Примеры. Решить уравнение.

1) $x^{3\lg x-\frac{1}{\lg x}}=\sqrt[3]{10}$, где $x>0.$

Решение. В данном задании целесообразно прологарифмировать обе части уравнения по основанию 10, поскольку в условии уже имеется десятичный логарифм.

Получаем $\lg(x^{3\lg x-\frac{1}{\lg x}})=\lg\sqrt[3]{10}$, откуда $(3\lg x-\dfrac{1}{\lg x})\lg x=\dfrac{1}{3}.$ Введем новую переменную $\lg x=t$. Тогда полученное уравнение перепишется в виде (учитывая, что $t\neq 0$)

$$3t^2-1=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{2}{3},\\ t=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lg x=\dfrac{2}{3},\\ \lg x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt[3]{100},\\ x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{100}}\end{array}\right.$$

Ответ: $\sqrt[3]{100},\dfrac{1}{\sqrt[3]{100}}.$

2) $x^6\cdot 5^{-\log_x 5}=5^{-5}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ x\neq 1.\end{cases}$ Прологарифмируем обе части уравнения по основанию x.

$\log_x(x^6\cdot 5^{-\log_x 5})=\log_x(5^{-5}),\ \log_x x^6+\log_x 5^{-\log_x 5}=-5\log_x 5,$

$6\cdot\log_x x-\log_x 5\cdot\log_x 5+5\log_x 5=0,\ 6-\log_x^2 5+5\log_x 5=0.$ Пусть $\log_x 5=t$, тогда

$$6-t^2+5t=0\Leftrightarrow t^2-5t-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=6,\\ t=-1\end{array}\right.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l}\log_x 5=6,\\ \log_x 5=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5=x^6,\\ 5=x^{-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt[6]{5},\\ x=\dfrac{1}{5}\end{array}\right.$ Найденные значения x удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\sqrt[6]{5},\dfrac{1}{5}.$

Решить уравнения

1) $x^{\lg x} = 1000x^2.$ Ответ: $\left\{\frac{1}{10};1000\right\}.$

2) $(x+1)^{\lg(x+1)} = 100(x+1).$ Ответ: $\left\{-\frac{9}{10};99\right\}.$

3) $x^{2\lg^3 x - 1{,}5\lg x} = \sqrt{10}.$ Ответ: $\left\{\frac{1}{10};10\right\}.$

4) $27 \cdot x^{\log_{27} x} = x^{\frac{10}{3}}.$ Ответ: $\left\{3;27^3\right\}.$

5) $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5.$ Ответ: $\left\{\frac{1}{5};25\right\}.$

Решение логарифмических уравнений требует знания различных методов и подходов, а также умения применять свойства логарифмов. Важно помнить о необходимости проверки найденных решений на допустимость, особенно в случаях, когда переменная находится под знаком логарифма или в основании. Разнообразие видов логарифмических уравнений предполагает использование различных стратегий, что делает изучение этой темы интересным и полезным для дальнейшего освоения математики.

1.3 ВИДЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Логарифмические неравенства представляют собой неравенства, в которых логарифмы выражены через переменные. Решение таких неравенств требует понимания свойств логарифмов и методов работы с ними. Рассмотрим основные виды логарифмических неравенств и методы их решения.

Решение простейших логарифмических неравенств основано на следующих свойствах монотонности логарифма:

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x), \\ a. > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ a > 1, \\ f(x) > g(x); \end{cases}$$

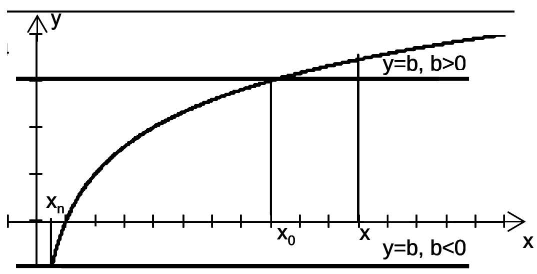
$$\begin{cases}\log_a f(x) > \log_a g(x),\\ 0 < a < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0,\\ 0 < a < 1,\\ f(x) < g(x);\end{cases}$$

В данных переходах от простейших логарифмических неравенств к равносильным системам неравенств, не содержащих знака логарифма, учтена область допустимых значений исходного неравенства. Что, значит, решить неравенство?

Решить неравенство - значит, найти все его решения или показать, что их нет.

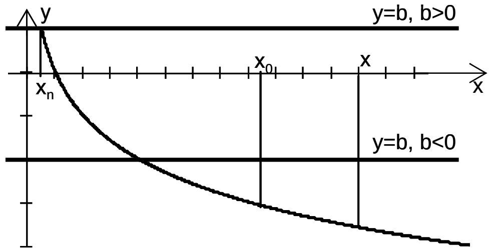
Что называется решением неравенства?

Решением неравенства с неизвестным x называют число x_0, при подстановке которого в неравенство вместо x получается верное числовое неравенство.

$y = \log_a x, a > 1$	
	***Вывод***. Если $a > 1$, то для каждого $x > x_0$ соответствующая точка графика функции $y = \log_a x, a > 1$ находится выше прямой $y = b$, а для каждого x из интервала $0 < x < x_0$ соответствующая точка графика функции $y = \log_a x, a > 1$ находится ниже прямой $y = b$.

$a > 1$	
$\log_a x > b$, $\log_a x > \log_a a^b$	$\log_a x < b$, $\log_a x < \log_a a^b$,

$\begin{cases} x > 0, \\ x > a^b; \end{cases}$ $x > a^b$.	$\begin{cases} x > 0, \\ x < a^b; \end{cases}$ $0 < x < a^b$.

$y = \log_a x, 0 < a < 1$	
	***Вывод***. Если $0 < a < 1$, то для каждого $0 < x < x_0$ соответствующая точка графика функции $y = \log_a x, 0 < a < 1$ находится выше прямой $y = b$, а для каждого $x > x_0$ соответствующая точка графика функции $y = \log_a x, 0 < a < 1$ находится ниже прямой $y = b$.

$0 < a < 1$	
$\log_a x > b$, $\log_a x > \log_a a^b$, $\begin{cases} x > 0, \\ x < a^b; \end{cases}$ $0 < x < a^b$.	$\log_a x < b$, , $\log_a x < \log_a a^b$, $\begin{cases} x > 0, \\ x > a^b; \end{cases}$ $x > a^b$.

Типы логарифмических неравенств и методы их решения.

1). Простейшие логарифмические неравенства.

Пример 1. $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) > 0$.

Решение:

Т. к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \neq 1$; $y = \log_{\frac{1}{3}} t \left(0 < \frac{1}{3} < 1\right)$ убывает на всей области определения и $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 5x - 1 > 0, \\ 5x - 1 < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0{,}2\ , \\ x < 0{,}4; \end{cases} \quad 0{,}2 < x < 0{,}4.$$

Ответ: (0,2;0,4).

Пример 2. $\log_{0,5}(4x-3) > \log_{0,5}(x+3)$.

Решение:

Т. к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \neq 1$; $y = \log_{0,5} t\,(0 < 0{,}5 < 1)$ убывает на всей области определения, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4x - 3 < x + 3, \\ 4x - 3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x > 0{,}75; \end{cases} \quad 0{,}75 < x < 2.$$

Ответ: (0,75;2).

2). Логарифмические неравенства, сводящиеся к простейшим логарифмическим неравенствам.

Пример 1. $\log_5(3x-1) + \log_{\frac{1}{5}}(1+x^2) \geq 0$.

Решение:

$\log_5(3x-1) + \log_{\frac{1}{5}}(1+x^2) \geq 0$,

$\log_5(3x-1) - \log_5(1+x^2) \geq 0$,

$\log_5(3x-1) \geq \log_5(1+x^2)$.

Т. к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \neq 1$ и $y = \log_5 t\,(5 > 1)$ возрастает на всей области определения, то неравенство равносильно системе

$\begin{cases} 3x - 1 \geq 1 + x^2, \\ 1 + x^2 > 0; \end{cases}$ т. к. $1 + x^2 > 0$, при $x \in \mathbf{R}$, то система равносильна неравенству $3x - 1 \geq 1 + x^2$.

$x^2 - 3x + 2 \leq 0$,

$1 \leq x \leq 2$.

Ответ: $[1;2]$.

Пример 2. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x \leq 6$.

Решение:

$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x \leq 6$,

$\log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x \leq 6$,

$2\log_3 x \leq 6$,

$\log_3 x \leq 3$.

Т. к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \neq 1$; $y = \log_3 t\,(3 > 1)$ возрастает на всей области определения и $3 = \log_3 27$, то неравенство равносильно системе

$\begin{cases} x > 0, \\ x \leq 27; \end{cases}$ $0 \leq x \leq 27$.

Ответ: $[0;27]$.

Пример 3. $\log_{0,5}(x - 0,5) + \log_{0,5}(x - 1) \geq 1$.

Решение:

$\log_{0,5}(x - 0,5) + \log_{0,5}(x - 1) \geq 1$.

Т. к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \neq 1$; $y = \log_{0,5} t$ $(0 < 0,5 < 1)$ убывает на всей области определения и $\log_{0,5} 0,5 = 1$, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x-0{,}5>0, \\ x-1>0, \\ \log_{0{,}5}(x-0{,}5)+\log_{0{,}5}(x-1)\ge 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x>0{,}5, \\ x>1, \\ \log_{0{,}5}(x-0{,}5)(x-1)\ge 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x>1, \\ (x-0{,}5)(x-1)\le 0{,}5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>1, \\ x^2-1{,}5x\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>1, \\ 0\le x\le 1{,}5; \end{cases} \quad 1<x\le 1{,}5.$$

Ответ: $(1;1{,}5]$.

Пример 4. $1-\log_5(x-3)\le \log_5(x+1)$.

Решение:

$1-\log_5(x-3)\le \log_5(x+1)$.

Т. к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0, a\ne 1$; $y=\log_5 t$ $(5>1)$ возрастает на всей области определения и $1=\log_5 5$, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x+1>0, \\ 1-\log_5(x-3)\le \log_5(x+1); \end{cases} \quad \begin{cases} x>3, \\ x>-1, \\ \log_5(x+1)+\log_5(x-3)\ge 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x>3, \\ \log_5(x+1)(x-3)\ge 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>3, \\ (x+1)(x-3)\ge 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x>3, \\ x^2-2x-8\ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>3, \\ \left[\begin{array}{l} x\le -2, \\ x\ge 4; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>3, \\ x\le -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ x\ge 4; \end{cases} \end{array}\right. \quad x\ge 4.$$

Ответ: $[4;\infty)$.

3). Логарифмические неравенства, сводящиеся к неравенствам второй степени.

Пример 1. $2\log^2_{\frac{1}{2}} x-5\log_{\frac{1}{2}} x+2>0$.

Решение:

$2\log_{\frac{1}{2}}^{2}x-5\log_{\frac{1}{2}}x+2>0$. Пусть $\log_{\frac{1}{2}}x=t$ тогда

$2t^{2}-5t+2>0$,

$$\left[\begin{array}{l} t<0{,}5, \\ t>2. \end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной x. Т. к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0, a\neq 1$, то

$$\begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} \log_{0{,}5}x<0{,}5, \\ \log_{0{,}5}x>2; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} -\log_{2}x<0{,}5, \\ -\log_{2}x>2; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} \log_{2}x>-0{,}5, \\ \log_{2}x<-2; \end{array}\right. \end{cases}$$ $y=\log_2 r\,(2>1)$ возрастает на всей области определения, то

$$\begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ x<\dfrac{1}{4}; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ x<\dfrac{1}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} x>0, \\ x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0<x<\dfrac{1}{4}, \\ x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\infty\right)$.

Пример 2. $\log_3\left(\frac{3}{x}\right)\log_3(3x)<-4\log_3 x+4$.

Решение:

$\log_3\left(\frac{3}{x}\right)\log_3(3x)<-4\log_3 x+4$.

Т. к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0, a\neq 1$, то для нахождения области допустимых значений переменной x составим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} > 0, \\ 3x > 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad x > 0.$$

В найденной области допустимых значений переменной x преобразуем неравенство.

$(\log_3 3 - \log_3 x)(\log_3 3 + \log_3 x) < 4(1 - \log_3 x)$,

$(1 - \log_3 x)(1 + \log_3 x) - 4(1 - \log_3 x) < 0$,

$(1 - \log_3 x)(\log_3 x - 3) < 0$,

$(\log_3 x - 1)(\log_3 x - 3) > 0$,

$\left[\begin{array}{l} \log_3 x < 1, \\ \log_3 x > 3; \end{array}\right.$ $y = \log_3 t \, (3 > 1)$ возрастает на всей области определения и $1 = \log_3 3$, а также $3 = \log_3 27$.

$$\left[\begin{array}{l} x < 3, \\ x > 27. \end{array}\right.$$

С учётом области допустимых значений переменной x получим:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 3, \\ x > 27; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ x < 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ x > 27; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 < x < 3, \\ x > 27. \end{array}\right.$$

Ответ: $(0;3) \cup (27;\infty)$.

4). Логарифмические неравенства, сводящиеся к рациональным неравенствам.

Пример 1. $\dfrac{2}{\lg x + \lg 0{,}1} - \dfrac{1}{\lg x} > 0$.

Решение:

Пусть $\lg x = t$ и $\lg 0{,}1 = -1$, тогда

$$\frac{2}{t-1}-\frac{1}{t}>0,$$

$$\frac{t+1}{t(t-1)}>0,$$

$$\left[\begin{array}{l}-1<t<0,\\ t>1.\end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной x. Т. к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0, a\neq 1$, то

$\begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}-1<\lg x<0,\\ \lg x>1;\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}\lg 0{,}1<\lg x<\lg 1,\\ \lg x>\lg 10;\end{array}\right.\end{cases}$ $y=\lg r$ $(10>1)$ возрастает на всей области определения

$\begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}0{,}1<x<1,\\ x>10;\end{array}\right.\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ 0{,}1<x<1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ x>10;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}0{,}1<x<1,\\ x>10.\end{array}\right.$

Ответ: $(0;1)\cup(10;\infty)$.

Пример 2. $\log_{\frac{1}{3}} x<\log_x 3-\frac{5}{2}$.

Решение:

$$\log_{\frac{1}{3}} x<\log_x 3-\frac{5}{2}.$$

Т. к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0, a\neq 1$, то $\begin{cases}x>0,\\ x\neq 1.\end{cases}$

В найденной области допустимых значений переменной x преобразуем данное неравенство к виду:

$$-\log_3 x<\frac{1}{\log_3 x}-\frac{5}{2}.$$

Пусть $\log_3 x=t$.

Тогда $-t<\frac{1}{t}-\frac{5}{2}$,

$$\frac{2t^2-5t+2}{2t}>0, \quad \frac{(t-2)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{t}>0, \quad \left[\begin{array}{l} 0<t<\frac{1}{2}, \\ t>2. \end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной x.

$\begin{cases} x>0,\ x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} 0<\log_3 x<\frac{1}{2}, \\ \log_3 x>2; \end{array}\right. \end{cases}$ $y=\log_3 r\ (3>1)$ возрастает на всей области определения и

$\frac{1}{2}=\log_3\sqrt{3}$, $2=\log_3 9$

$$\begin{cases} x>0\ ,\ x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} 1<x<\sqrt{3}, \\ x>9; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} 1<x<\sqrt{3}, \\ x>9. \end{array}\right.$$

Ответ: $(1;\sqrt{3})\cup(9;\infty)$

5). Логарифмические неравенства, содержащие переменную в основании логарифма.

Пример 1. $\log_{1-3x}3<0.$

Решение:

Т. к. $\log_{1-3x}3<0$ и $3>1$, то

$0<1-3x<1,$

$-1<-3x<0,$

$$0<x<\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

Пример 2. $\log_x(2x+5)>1$.

Решение:

$\log_x(2x+5)>1,$

$\log_x(2x+5)>\log_x x$.

Т. к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \neq 1$, то

$$\begin{cases} 2x+5>0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ 2x+5<x, \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ 2x+5>x; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2{,}5\ , \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ x<-5, \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ x>-5; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2{,}5, \\ x>1; \end{cases} \quad x>1.$$

Ответ: $(1;\infty)$.

Пример 3. $\log_x(2x+3) \le 2$.

Решение:

$\log_x(2x+3) \le 2$,

$\log_x(2x+3) \le \log_x x^2$.

Т. к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \neq 1$, то

$$\begin{cases} 2x+3>0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ 2x+3 \ge x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ 2x+3 \le x^2; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ x^2-2x-3 \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ x^2-2x-3 \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ -1 \le x \le 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 3; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} 0<x<1, \\ x \ge 3; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} 0<x<1\ , \\ x \ge 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(0;1) \cup [3;\infty)$.

При решении логарифмических неравенств важно проверять, что найденные решения удовлетворяют условиям, необходимым для существования логарифмов (например, аргумент логарифма должен быть положительным).

Решение логарифмических неравенств требует применения различных методов и подходов, а также умения работать с свойствами логарифмов. Важно помнить о необходимости проверки найденных решений на допустимость, особенно в случаях, когда переменная находится под знаком логарифма или в основании. Разнообразие видов логарифмических неравенств предполагает использование различных стратегий, что делает изучение этой темы важным аспектом математического анализа.

1.4. Основные ошибки учащихся при решении логарифмических уравнений и неравенств и методические рекомендации по их устранению.

Основные ошибки:

1. **Неправильное применение свойств логарифмов:**
   - Учащиеся часто забывают о правилах преобразования логарифмов, таких как логарифм произведения, частного или степени. Это приводит к ошибкам в решении.
2. **Игнорирование области определения логарифмических функций:**
   - Учащиеся могут не учитывать, что аргумент логарифма должен быть положительным, что приводит к неверным решениям или отсутствию решений.
3. **Ошибки при преобразовании уравнений в экспоненциальную форму:**
   - Учащиеся иногда неправильно преобразуют логарифмические уравнения в экспоненциальные, что ведет к неправильным результатам.

4. **Неправильное решение логарифмических неравенств:**
   - Ошибки возникают из-за неправильного анализа знаков логарифмических выражений и неверного применения свойств неравенств.
5. **Недостаток внимания к знакам:**
   - При решении неравенств учащиеся могут игнорировать изменения знаков при умножении или делении на отрицательные числа.
6. **Неправильное использование графических методов:**
   - Учащиеся могут неправильно интерпретировать графики логарифмических функций, что приводит к ошибкам при нахождении решений.

Методические рекомендации по устранению ошибок:

1. **Обучение свойствам логарифмов:**
   - Проведение уроков, посвященных свойствам логарифмов, с акцентом на их практическое применение. Использование примеров и задач для закрепления материала.
2. **Работа с областью определения:**
   - Упражнения на определение области допустимых значений для логарифмических функций. Подчеркивание важности проверки условий, при которых логарифмы определены.
3. **Пошаговое преобразование уравнений:**

- Рекомендуется обучать учащихся пошаговому преобразованию логарифмических уравнений в экспоненциальную форму, с объяснением каждого этапа.

4. **Анализ логарифмических неравенств:**
   - Практика решения логарифмических неравенств с акцентом на анализ знаков. Обсуждение случаев, когда необходимо учитывать изменение знаков.
5. **Работа с графиками:**
   - Использование графиков логарифмических функций для визуализации решений. Обсуждение особенностей поведения функций и их пересечений с осью абсцисс.
6. **Контрольные работы и тесты:**
   - Проведение контрольных работ и тестов, которые включают разнообразные типы задач на логарифмические уравнения и неравенства. Это поможет выявить и устранить ошибки.
7. **Групповая работа и обсуждение:**
   - Организация групповых занятий, где учащиеся могут обсуждать свои решения и ошибки, что способствует лучшему пониманию материала.
8. **Использование интерактивных технологий:**
   - Применение интерактивных платформ и программ для решения логарифмических уравнений, что позволит учащимся визуализировать процесс и результаты.

Устранение ошибок при решении логарифмических уравнений и неравенств требует системного подхода и регулярной практики. Применение методических рекомендаций поможет учащимся развить уверенность в своих знаниях и навыках, что в свою очередь повысит их успеваемость в математике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение логарифмических уравнений и неравенств является важной частью математического образования, так как эти темы не только развивают логическое мышление учащихся, но и находят широкое применение в различных областях науки и техники. В ходе работы над данным пособием были рассмотрены ключевые аспекты, касающиеся наиболее распространенных ошибок учащихся, а также предложены эффективные методические рекомендации по их устранению.

Основные выводы, сделанные в процессе разработки методического пособия, включают:

1. **Необходимость глубокого понимания свойств логарифмов:** Учащиеся должны не только знать правила, но и уметь применять их в различных контекстах. Это требует систематического подхода к обучению и регулярной практики.

2. **Важность области определения:** Осознание и учет области определения логарифмических функций являются критически важными для правильного решения уравнений и неравенств. Это помогает избежать ошибок и недоразумений.

3. **Пошаговое решение задач:** Разделение процесса решения на четкие этапы способствует более глубокому пониманию материала и снижает вероятность ошибок. Учащиеся должны привыкнуть к структурированному подходу к решению.

4. **Использование визуальных методов:** Графическое представление логарифмических функций помогает учащимся лучше осмыслить поведение функций и находить решения неравенств. Визуализация является мощным инструментом в обучении математике.

5. **Групповая работа и обсуждение:** Совместное решение задач и обсуждение ошибок в группе способствует обмену опытом и лучшему усвоению материала. Это создает поддерживающую атмосферу, в которой учащиеся могут чувствовать себя уверенно.

6. **Интерактивные технологии:** Внедрение современных технологий в процесс обучения делает его более увлекательным и эффективным. Интерактивные платформы позволяют учащимся самостоятельно исследовать и решать задачи, что способствует развитию их самостоятельности и критического мышления.

В заключение, успешное изучение логарифмических уравнений и неравенств требует комплексного подхода, включающего теоретические знания, практические навыки и активное взаимодействие учащихся. Применение предложенного методического пособия поможет педагогам создать условия для успешного освоения данной темы, что, в свою очередь, повысит уровень математической подготовки учащихся и их уверенность в собственных силах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алимов, Ш. А. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый уровень / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева [и др.] - 18-е изд. - Москва : Просвещение, 2012. - 464 с.
2. Бабичева, Т. А. Учебное пособие «Решение логарифмических уравнений» (практикум) / Т. А. Бабичева. - Махачкала : ДГУНХ, 2018. - 32 с.
3. Балаян, Э. Н. Математика: задачи типа С5: уравнения, неравенства и системы с параметрами / Э. Н. Балаян. - Ростов на Дону : Феникс, 2014. - 223 с.
4. Барвенов, С. А. Методы решения показательных и логарифмических уравнений, неравенств, систем : учебник для общеобразовательных учреждений / А. И. Азаров, С. А. Барвенов. - Москва : Аверсэв, 2005. - 288 с.
5. Блох, А. Методика преподавания математики в средней школе / А. Блох, Е. С. Канин, Е. С. Черкасов [и др.] - Москва : Просвещение, 2015. - 336 с.
6. Виленкин, Н. Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд, - 30-е изд, стер. - Москва : Мнемозина, 2014. - 288 с.

7. Власова, А. П. Задачи с параметрами. Логарифмические и показательные уравнения, неравенства, системы уравнений. 10-11 классы / А.П. Власова, Н.И. Латанова. - Москва : Дрофа, 2007. - 490 с.

8. Галицкий, М. Л. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. Методические рекомендации и дидактические материалы / М. Л. Галицкий, М. М. Мошкович, С. И. Шварцбурд. - Москва : Просвещение, 1986. - 352 с.

9. Гейдман, Б. П. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства / Б. П. Гейдман. - Москва : МЦНМО, 2013. - 185 с.

10. Глухов, М. М. Задачник-практикум по алгебре / М. М. Глухов, А. С. Солодовников. - Москва : Просвещение, 2009. - 276 с.

11. Далингер, В. А. Математика: логарифмические уравнения и неравенства : учебное пособие для среднего профессионального образования / В.

А. Далингер. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : Издательство Юрайт, 2020. - 176 с.

12. Далингер, В. А. Типичные ошибки учащихся при решении логарифмических уравнений и неравенств их систем и пути их предупреждения / В. А. Далингер // Международный журнал Экспериментального образования. - 2015. - № 4-2. - с. 445-450.

13. Иванов, А. А Математика. Пособие для подготовки к ЕГЭ / А. А. Иванов, А. П. Иванов. - Москва : Физматкнига, 2011. - 52 с.

14. Ивлев, Б. М. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса / Б. М. Ивлев, С. М. Саакян, С. И. Шварцбурд. - Москва : Просвещение, 2013. - 143 с.

15. Жукова, Н. Д. История логарифмов. Различные подходы к определению логарифма // Молодой ученый. - 2019. - №18. - С. 78-81.

16. Жафяров, А. Ж. Профильное обучение математике старшеклассников учебно-дидактический комплекс / А. Ж. Жафяров.- Новосибирск : Сиб. унив., 2003. - 48 с.

17. Захаров, А. М Логарифм и его свойства. Логарифмические уравнения и неравенства: методическое пособие / А. М. Захаров, М. В. Крылова. - Саратов : 2017.

18. Колмогоров, А. Н. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений/ А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын [и др.] ; под ред. А. Н. Колмогорова. - 26-е изд. - Москва : Просвещение, 2018. - 384 с.

19. Кокурина, Ю. К. Арифметика, алгебра, анализ / Ю. К. Кокурина - Владимир : ВлГУ, 2016. - 143 с.

20. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. - Москва : Дрофа, 2004. Т.1. - 687 с.

21. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры : учебник для вузов / А. Г. Курош.
- 22-е изд. стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2021. - 432 с.

22. Лисаченко, О. А. Особенности методики построения системы задач для изучения темы «Логарифмы. Логарифмические уравнения» / О. А. Лисаченко, И. В Яковенко // Вестник Таганрогского государственного педагогического института. - 2017. - № 1. - с. 287-292.

23. Литвиненко, В. Н. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. - Москва : ABF, 2013.

24. Ляхова, Н. Е. Методы решения уравнений и неравенств в задачах с параметрами: учеб. пособие / Н. Е. Ляхова, И. В. Яковенко; отв. ред. проф. А. А. Илюхин. - Таганрог : ТГПИ имени А.П.Чехова, 2014. - 92 с.

25. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. : В двух частях. Ч. 1 : Учеб. для общеобразоват. учреждений. / А. Г. Мордкович. - 14-е изд. - Москва : Мнемозина, 2013. - 400 с.

26. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа: 11 класс. В 2 ч. Ч. 2 Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / под ред. А. Г. Мордковича. - 3-е изд., стер. - Москва : Мнемозина,

2013. - 264 с.
27. Мерзляк, А. Г. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа: 11 класс: методическое пособие. / Буцко Е. В., Мерзляк А. Г., Номировский Д. А. , Полонский В. Б. [и др.] - Москва : Вентана-Граф, 2018. - 83 с.
28. Никольский, С. М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. - 8-е изд. - Москва : Просвещение, 2009. - 464 с.
29. Лаппо, Л. Д. ЕГЭ. Математика. Подготовка к ЕГЭ / Л. Д. Лаппо. - Москва : Издательство «Экзамен», 2017.
30. Олехник, С. Н. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения / С. Н. Олехник, М. К. Потапов, П. И. Пасиченко. - Москва : Дрофа, 2015.
31. Петрович, А. Ю. Логарифмические уравнения и неравенства / А. Ю. Петрович. - Москва : Подготовительные курсы, 2008. - 20 с.
32. Радченко, С. А. Методика решения задач повышенной сложности по математике. Раздел «Логарифмические неравенства» / С. А. Радченко. - Славянск-на-Кубани : Филиал Кубанского гос. ун-та в г. Славянске-на-Кубани, 2018. - 29 с.
33. Рисберг, В. Г. Решение показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем уравнений повышенного и высокого уровня сложности. Ч.1 / В. Г. Рисберг. - Пермь : Пушка, 2015. - 56 с.
34. Севрюков, П. Ф. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков. - Москва : Илекса ; Народное образование ; Ставрополь : Сервисшкола, 2008. - 352 с.

Приложение 1.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Карточки-тренажеры

Понятие логарифма. Свойства логарифмов							
	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	Вариант 4	
1	$(\log_2 16)\cdot(\log_6 36)$	1	$(\log_2 4)\cdot(\log_3 81)$	1	$(\log_6 216)\cdot(\log_9 729)$	$(\log_7 343)\cdot(\log_2 8)$	1
2	$6\cdot 7^{\log_7 2}$	2	$9\cdot 10^{\log_{10} 3}$	2	$8\cdot 8^{\log_8 6}$	$13\cdot 10^{\log_{10} 2}$	2
3	$16^{\log_4 7}$	3	$9^{\log_3 7}$	3	$49^{\log_7 12}$	$16^{\log_4 3}$	3
4	$\log_{0,25} 8$	4	$\log_{0,2} 125$	4	$\log_{0,04} 5$	$\log_{0,25} 2$	4
5	$\log_6 270-\log_6 7,5$	5	$\lg 250-\lg 2,5$	5	$\log_6 234-\log_6 6,5$	$\log_6 54-\log_6 1,5$	5
6	$\log_8 512$	6	$\log_{25} 0,2$	6	$\log_2 16$	$\log_4 8$	6
7	$\log_{0,2} 10-\log_{0,2} 2$	7	$\log_{0,6} 5-\log_{0,6} 3$	7	$\log_{2,75} 4-\log_{2,75} 11$	$\log_{0,48} 25-\log_{0,48} 12$	7
8	$\frac{\log_6 512}{\log_6 8}$	8	$\frac{\log_6 4}{\log_6 2}$	8	$\frac{\log_3 121}{\log_3 11}$	$\frac{\log_2 1331}{\log_2 11}$	8
9	$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$	9	$\frac{6^{\log_{12} 432}}{6^{\log_{12} 3}}$	9	$\frac{2^{\log_{13} 507}}{2^{\log_{13} 3}}$	$\frac{5^{\log_6 108}}{5^{\log_6 3}}$	9
10	$104\log_3 \sqrt[8]{3}$	10	$75\log_{11} \sqrt[5]{11}$	10	$50\log_{10} \sqrt[5]{10}$	$42\log_2 \sqrt[6]{2}$	10
11	$\log_{\sqrt[6]{13}} 13$	11	$\log_{\sqrt[9]{4}} 4$	11	$\log_{\sqrt[5]{10}} 10$	$\log_{\sqrt[4]{10}} 10$	11
12	$\frac{\log_3 18}{2+\log_3 2}$	12	$\frac{\log_3 63}{2+\log_3 7}$	12	$\frac{\log_2 52}{2+\log_2 13}$	$\frac{\log_8 320}{2+\log_8 5}$	12
13	$\log^2_{\sqrt{7}} 49$	13	$\log^2_{\sqrt{2}} 4$	13	$\log^2_{\sqrt{8}} 512$	$\log^2_{\sqrt{8}} 64$	13

14	$5^{3+\log_5 2}$	14	$3^{2+\log_3 7}$	14	$8^{2+\log_8 13}$	$8^{2+\log_8 12}$	14
15	$\log_4\log_5 25$	15	$\log_{16}\log_6 36$	15	$\log_{16}\log_3 9$	$\log_{16}\log_4 16$	15
16	$\log_{\frac{1}{18}}\sqrt{18}$	16	$\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{5}$	16	$\log_{\frac{1}{19}}\sqrt{19}$	$\log_{\frac{1}{8}}\sqrt{8}$	16

Логарифмические уравнения				
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1	$\log_2(4-x) = 7$	$\log_6(3-x) = 2$	$\log_2(7-x) = 6$	$\log_3(4-x) = 2$
2	$\log_5(5-x) = \log_5 3$	$\log_3(14-x) = \log_3 5$	$\log_{13}(17-x) = \log_{13} 12$	$\log_3(6-x) = \log_3 7$
3	$\log_{\frac{1}{7}}(7-x) = -2$	$\log_{\frac{1}{7}}(7-3x) = -2$	$\log_{\frac{1}{8}}(13-x) = -2$	$\log_{\frac{1}{4}}(9-5x) = -3$
4	$\log_5(5-x) = 2\log_5 3$	$\log_4(8-5x) = 2\log_4 3$	$\log_2(4-x) = 2\log_2 5$	$\log_2(18-6x) = 4\log_2 3$
5	$\log_7(x^2+5x) = \log_7(x^2+6)$	$\log_8(x^2+x) = \log_8(x^2-4)$	$\log_5(x^2+4x) = \log_5(x^2+11)$	$\log_3(x^2+4x) = \log_3(x^2+4)$
6	$\log_4(4+7x) = \log_4(1+5x)+1$	$\log_2(8+3x) = \log_2(3+x)+1$	$\log_2(8+7x) = \log_2(8+3x)+1$	$\log_2(2-x) = \log_2(2-3x)+1$
7	$\log_{x-2} 16 = 2$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.	$\log_{x+1} 49 = 2$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.	$\log_{x-1} 25 = 2$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.	$\log_{x+7} 25 = 2$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.
8	$\log_8 2^{6x-3} = 4$	$\log_4 2^{3x+2} = 4$	$\log_{16} 2^{2x-4} = 4$	$\log_{16} 2^{5x-6} = 4$
9	$2^{\log_8 5x-3} = 4$	$2^{\log_8 2x-5} = 4$	$2^{\log_8 5x-3} = 4$	$2^{\log_4 5x+8} = 2$

Переход к новому основанию логарифма			
Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$\frac{\log_9 8}{\log_{81} 8}$	$\frac{\log_2 7}{\log_4 7}$	$\frac{\log_9 2}{\log_{81} 2}$	$\frac{\log_5 8}{\log_{25} 8}$
$\log_5 7 \cdot \log_7 25$	$\log_3 13 \cdot \log_{13} 9$	$\log_4 13 \cdot \log_{13} 16$	$\log_7 8 \cdot \log_8 49$

$(1-\log_6 24)(1-\log_4 24)$	$(1-\log_8 48)(1-\log_6 48)$	$(1-\log_8 24)(1-\log_3 24)$	$(1-\log_{19} 95)(1-\log_5 95)$
$\frac{\log_8 20}{\log_8 5}+\log_5 0,05$	$\frac{\log_2 20}{\log_2 12}+\log_{12} 0,05$	$\frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 7}+\log_7 0,1$	$\frac{\log_4 10}{\log_4 9}+\log_9 0,1$
$\log_{0,5} 5\cdot\log_5 2$	$\log_{0,4} 8\cdot\log_8 2,5$	$\log_{0,4} 6\cdot\log_6 2,5$	$\log_{0,8} 3\cdot\log_3 1,25$
$\log_a(a^3b^8)$ если $\log_b a=\frac{1}{3}$	$\log_a(ab^2)$ если $\log_b a=\frac{2}{11}$	$\log_a(a^2b^6)$ если $\log_b a=\frac{2}{11}$	$\log_a(a^5b^8)$ если $\log_b a=\frac{1}{2}$
$\log_a\frac{a^4}{b^6}$ если $\log_a b=-14$	$\log_a\frac{a^6}{b^4}$ если $\log_a b=-2$	$\log_a\frac{a}{b^5}$ если $\log_a b=-7$	$\log_a\frac{a^4}{b^5}$ если $\log_a b=15$

ОТВЕТЫ:

Понятие логарифма. Свойства логарифмов							
	Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**	**Вариант 4**			
1	8	8	9	9			
2	12	27	48	26			
3	49	49	144	9			
4	-1,5	-3	-0,5	-0,5			
5	2	2	2	2			
6	3	-0,5	4	1,5			
7	-1	-1	-1	-1			
8	3	2	2	3			
9	81	36	4	25			
10	13	15	10	7			
11	6	9	5	4			
12	1	1	1	1			
13	16	16	36	16			
14	250	63	832	768			
15	0,5	0,25	0,25	0,25			
16	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5			
		Логарифмические уравнения					
			Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**	**Вариант 4**	
		1	-124	-33	-57	-5	
		2	2	9	5	-1	
		3	-42	-14	-51	-11	
		4	-4	-0,2	-21	-10,5	
		5	1,2	4	2,75	1	
		6	0	-2	8	0,4	
		7	6	6	6	-2	
		8	2,5	2	6	4,4	
		9	13,4	34,5	13,4	-0,8	
			Переход к новому основанию логарифма				
				Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**	**Вариант 4**

			1	2	2	2	2
			2	2	2	2	2
			3	1	1	1	1
			4	0	0	0	0
			5	-1	-1	-1	-1
			6	27	12	35	21
			7	88	14	36	-71
			8				
			9				