

Решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. Стандартные общие правила:

Оценка	З а ч т о с т а в и т с я
7	Верное решение
6	Верное решение с небольшими недочетами
5	Решение в целом верно, но имеет заметные недочёты
4	Решение в основных чертах верно и выполнено более чем наполовину, но существенно неполно
3	Решение в целом отсутствует, но рассуждения содержат существенное продвижение в верном направлении
1-2	Решение в целом отсутствует, но содержит более или менее заметное продвижение в верном направлении
0	Решение полностью неверно или отсутствует

Далее — уточнения:

1. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни. Верно ли, что трехчлен $a^3x^2 + b^3x + c^3$ также имеет корни?

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим дискриминант первого трехчлена:

$$\left. \begin{array}{l} D_1 = b^2 - 4ac \geq 0 \\ b^2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow b^6 \geq 64a^3c^3$$

Если $ac > 0$, то $b^6 \geq 64a^3c^3 > 4a^3c^3$, а иначе $b^6 - 4a^3c^3 \geq 0$. В любом случае имеем $D_2 = (b^3)^2 - 4a^3c^3 \geq 0$, то есть у второго трехчлена есть корни.

Только ответ – 0 баллов.

2. Докажите, что

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2023}{2024!} < 1.$$

Решение. Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2023}{2024!} &= \frac{2-1}{2!} + \frac{3-1}{3!} + \frac{4-1}{4!} + \dots + \frac{2024-1}{2024!} = \\ &= \frac{2}{2!} - \frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} - \frac{1}{3!} + \frac{4}{4!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{2024}{2024!} - \frac{1}{2024!} = \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots - \frac{1}{2023!} + \frac{1}{2023!} - \frac{1}{2024!} = \\ &= 1 - \frac{1}{2024!} < 1\end{aligned}$$

Специальных критериев нет.

3. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B пересекают описанную окружность в точках K и L . Отрезки AK и BL пересекаются в точке X и делятся этой точкой в равных отношениях, считая от вершин треугольника. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

Решение. Из условия следует подобие треугольников $AХВ$ и KXL по первому признаку ($\angle AXB = \angle KXL$). Отсюда получаем, что $\angle BAK = \angle LKA$, но $\angle LKA = \angle ABL$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Так как AK и BL – биссектрисы, отсюда следует, что $\angle A = \angle B$.

Доказано подобие треугольников $AХВ$ и KXL – 4 балла.

4. Можно ли некоторую четверку подряд идущих натуральных чисел разбить на две пары так, чтобы сумма произведений чисел в этих парах была квадратом натурального числа?

Ответ: Нельзя.

Решение. Предположим противное. Среди четырех подряд идущих чисел одно делится на 4, одно при делении на 4 дает в остатке 1, одно – 2, одно – 3. Кроме того, квадрат целого числа при делении на 4 дает в остатке 0 или 1. Рассмотрим возможные остатки в разбиении на пары: $0 \cdot 1 + 2 \cdot 3$; $0 \cdot 2 + 1 \cdot 3$; $0 \cdot 3 + 1 \cdot 2$. При делении на 4 получаем соответственно остатки 2, 3, 2. Противоречие.

Только ответ – 0 баллов.

Рассмотрены остатки квадратов при делении на 4, других продвижений нет – 1-2 балла.

5. В загадочной стране города соединены между собой односторонними трассами. Известно, что, выехав из любого города, нельзя вернуться в него, пользуясь этими трассами. Докажите, что можно дополнить систему дорог так, чтобы каждый город был соединен трассой с каждым и при этом новая система удовлетворяла прежнему условию.

Решение. Покажем, что если существующая система дорог удовлетворяет условию и два города A и B не соединены трассой, то можно построить трассу $A \rightarrow B$ или $B \rightarrow A$ так, чтобы получившаяся система дорог по-прежнему удовлетворяла условию. Предположим противное. Тогда после проведения трассы $A \rightarrow B$ появится замкнутый путь $B \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_n \rightarrow A \rightarrow B$. Аналогично после проведения трассы $B \rightarrow A$ появится замкнутый путь $A \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \dots \rightarrow D_k \rightarrow B \rightarrow A$. Но тогда до проведения любой из трасс между A и B уже существовал замкнутый путь $A \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \dots \rightarrow D_k \rightarrow B \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_n \rightarrow A$ (возможно, некоторые вершины C_n и D_m совпадают), т. е. существующая система дорог не удовлетворяла условию, так как из A можно было вылететь и вернуться назад. Противоречие.

Специальных критериев нет.