

Решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. Стандартные общие правила:

| Оценка | З а ч т о с т а в и т с я |
|--------|--|
| 7 | Верное решение |
| 6 | Верное решение с небольшими недочетами |
| 5 | Решение в целом верно, но имеет заметные недочёты |
| 4 | Решение в основных чертах верно и выполнено более чем наполовину, но существенно неполно |
| 3 | Решение в целом отсутствует, но рассуждения содержат существенное продвижение в верном направлении |
| 1-2 | Решение в целом отсутствует, но содержит более или менее заметное продвижение в верном направлении |
| 0 | Решение полностью неверно или отсутствует |

Далее — уточнения:

1. Для натурального числа вычисляются суммы любых двух его цифр, стоящих рядом. Найдите наибольшее натуральное число, у которого все эти суммы различны.

Ответ: 99 887 766 554 433 221 100.

Решение. Покажем, что число, указанное в ответе, искомое. Наибольшее возможное значение суммы пары цифр равно 18, поэтому всего можно получить не более 19 пар сумм: от 0 до 18. Значит, искомое число X не более чем 20-значное. Рассмотрим теперь только 20-значные числа. Если какая-то из первой пары цифр числа X будет меньше 9, то и число будет меньше, чем приведенный пример. Значит, оно начинается с двух девяток. Третья цифра – не 9, а если она меньше 8, то X будет меньше, чем приведенный пример. Значит, третья цифра числа X равна 8. Аналогично получаем следующие цифры.

Только ответ – 1 балл.

2. Знаменатель ненулевой геометрической прогрессии не меньше 2. Докажите, что ни один из членов прогрессии нельзя представить в виде суммы конечного числа различных членов этой прогрессии.

Решение. Предположим противное, для некоторого k выполнено равенство $b_1 q^k = b_1 q^a + b_1 q^b + \dots + b_1 q^z$, где $a < b < \dots < z$; $q \geq 2$. Тогда на b_1 можно сократить, так как $b_1 \neq 0$. Если $k > z$, то равенство невозможно, так как

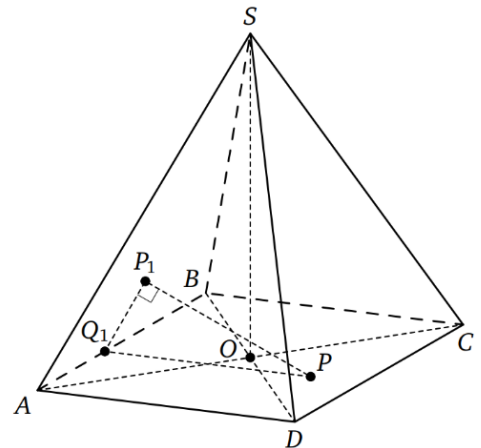
$$q^a + q^b + \dots + q^z < 1 + q + \dots + q^z = \frac{q^{z+1}-1}{q-1} \leq q^{z+1} - 1 \leq q^k.$$

При $k \leq z$ равенство также невозможно, поскольку кроме q^z в сумме есть и другие положительные слагаемые. Во всех случаях получаем противоречие.

Если решение аналогично приведённому, то разбор только одного из случаев $k \leq z$ и $k \geq z$ оценивается в 2 балла.


3. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб. Основание высоты пирамиды — точка пересечения диагоналей ромба. Докажите, что для любой точки на основании пирамиды сумма расстояний до двух противоположных боковых граней равна сумме расстояний до двух других боковых граней.

Решение. Пусть $SABCD$ — данная пирамида, SO — ее высота (см. рис.). Так как O — точка пересечения диагоналей ромба, то тетраэдры $SOAB$, $SOBC$, $SOCD$, $SODA$ равны, тогда двугранные углы с ребрами AB , BC , CD и DA равны между собой. Пусть они равны α . Тогда для любой точки P на основании пирамиды $PP_1 = PQ_1 \sin \alpha$, где PP_1 — расстояние от P до грани SAB , PQ_1 — расстояние от P до ребра AB .



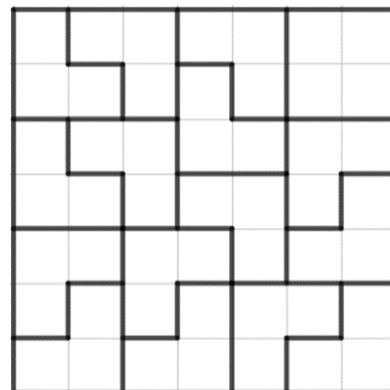
Аналогичные равенства верны для PP_2 , PP_3 , PP_4 — расстояний до остальных трех боковых граней и PQ_2 , PQ_3 , PQ_4 — расстояний до ребер BC , CD и DA соответственно. Поскольку в ромб можно вписать окружность, то $PQ_1 + PQ_3 = PQ_2 + PQ_4 = 2r$, где r — радиус окружности. Отсюда следует аналогичное равенство для расстояний до боковых граней.

За использование без доказательства утверждения $PQ_1 + PQ_3 = PQ_2 + PQ_4$, или равносильного, баллы не снижаются.

4. В клетках квадрата 7×7 расставлены действительные числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трехклеточном уголке  (повернутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем квадрате также положительна?

Ответ: Обязательно.

Решение. Докажем, что сумма чисел в любом квадрате 2×2 клетки положительна. Действительно, рассмотрим любой квадрат 2×2 . Пусть в нем записаны числа a, b, c, d . Тогда $a + b + c > 0$, $a + b + d > 0$, $a + c + d > 0$, $b + c + d > 0$. Сложив все эти неравенства, получим $3(a + b + c + d) > 0$. Значит, сумма всех четырех чисел квадрата 2×2 положительна. Разобьем теперь квадрат 7×7 на квадраты 2×2 и трехклеточные уголки. Пример разбиения приведен на рисунке. В каждой фигурке сумма чисел положительна, откуда следует ответ.



Только ответ – 0 баллов.

Присутствует идея разбить квадрат на непересекающиеся фигуры, дальнейших продвижений нет – 1 балл.

Квадрат разбит на пересекающиеся фигуры, делаются неверные выводы – 0 баллов.

5. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами, что каждое из уравнений $f(x) = f(6x - 1)$, $f(t) = f(3 - 15t)$ имеет (хотя бы одно) целочисленное решение?

Ответ: не существует.

Решение 1 (симметрия).

Допустим, что такой квадратный трехчлен нашелся. Рассмотрим параболу, график этого квадратного трехчлена. Поскольку $x \neq 6x - 1$ при целых x , эти два корня расположены симметрично по отношению к оси симметрии параболы. Аналогично точки t и $3 - 15t$ расположены симметрично. Отсюда получаем, что $x + (6x - 1) = t + (3 - 15t) \Leftrightarrow 7x + 14t = 4$. Последнее невозможно, так как левая часть делится на 7, а правая нет.

Решение 2 (подбор коэффициентов).

Пусть $f(t) = at^2 + bt + c$ удовлетворяет условию задачи. Запишем уравнение $f(x) = f(6x - 1)$:

$$ax^2 + bx + c = a(6x - 1)^2 + b(6x - 1) + c.$$

Вычтем из обеих частей c , сократим на a и обозначим $q = \frac{b}{a}$, получаем, что x удовлетворяет уравнению

$$x^2 + qx = (6x - 1)^2 + q(6x - 1).$$

С помощью этого уравнения мы можем выразить q через x :

$$q = \frac{(6x - 1)^2 - x^2}{x - (6x - 1)} = 1 - 7x.$$

Проведя аналогичные рассуждения со вторым уравнением, находим, что q можно выразить через t : $q = 14t - 3$. Таким образом, $1 - 7x = 14t - 3 \Leftrightarrow 7x + 14t = 4$, что невозможно.

Только ответ – 0 баллов.

В решении 1 замечена идея осевой симметрии, продвижений нет – 1 балл.

В решении 2 присутствует 1 арифметическая ошибка, не повлиявшая на ответ – 6 баллов. Если ошибок больше – не более 1 балла.