

1. Про квадратные трехчлены f_1 и f_2 известно, что они имеют корни, а у $f_1 - f_2$ корней нет. Докажите, что $f_1 + f_2$ имеет корни.

Решение 1 (Знак многочлена).

Предположим противное, $f_+ = f_1 + f_2$ и $f_- = f_1 - f_2$ оба не имеют корней. Если у многочлена нет корней, то он принимает значения одного знака. Тогда f_+ и f_- всегда одного знака или всегда противоположных знаков. В первом случае их сумма не меняет знак, но $f_+ + f_- = 2f_1$ имеет корни – противоречие. Во втором случае их разность должна иметь постоянный знак, но $f_+ - f_- = 2f_2$ тоже имеет корни – противоречие.

Решение 2 (Знак дискриминанта).

Пусть $f_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $f_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$. Тогда по условию:

$$D_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 \geq 0$$

$$D_2 = b_2^2 - 4a_2c_2 \geq 0$$

$$D_- = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) < 0$$

Теперь рассмотрим $f_1 + f_2$:

$$\begin{aligned} D_+ &= (b_1 + b_2)^2 - 4(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) \\ &= b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2 - 4(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) \\ &> b_1^2 + (b_1^2 + b_2^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)) + b_2^2 - 4(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) \\ &= 2(b_1^2 - 4a_1c_1) + 2(b_2^2 - 4a_2c_2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Несколько полян, северян и древлян собрались в хоровод. Оказалось, что имеется ровно 35 полян и ровно 40 древлян, рядом с каждым из которых стоит хотя бы один северянин. Докажите, что рядом с кем-то стоит два северянина.

Решение. Предположим противное. Тогда посчитаем число пар из стоящих рядом северянина и не северянина. С одной стороны, так как рядом с

полянином или древлянином стоит не более одного северянина, таких пар всего $35 + 40 = 75$. С другой стороны, каждый ряд из нескольких подряд идущих северян дает нам две такие пары – по одному на обоих концах этого ряда, то есть четное число. Противоречие.

3. Андрей взял 200 последовательных натуральных чисел и записал их в строку в некотором порядке. А Вася выписал под ними еще какие-то 200 последовательных натуральных чисел в некотором порядке. После чего Яна умножила каждое из Андреевых чисел на число, написанное под ним, и получила в результате 200 последовательных натуральных чисел. Докажите, что кто-то из них ошибся.

Решение. В первой и второй строке написано 200 четных и 200 нечетных чисел. Поскольку произведения в третьей строке – это тоже последовательные числа, среди них ровно 100 четных и 100 нечетных. Нечетное число в третьей строке равно произведению двух стоящих над ним чисел, значит, оба этих числа – нечетные. Отсюда следует, что в первых двух строках под нечетным числом обязательно стоит нечетное, а под четным – четное. Но тогда все четные числа в третьей строке делятся на 4, чего среди последовательных чисел не может быть, ведь если четное число n делится на 4, то число $n + 2$ четно, но не делится на 4.

4. Схема дворца представляет собой выпуклый многоугольник, разбитый диагоналями на залы. В каждой его внешней стене есть дверь, все двери открываются наружу. Докажите, что в каком-то из залов дворца все двери открываются наружу.

Решение. Докажем индукцией по количеству проведенных диагоналей, что всегда будет зал, двери которого открываются наружу. База – диагоналей нет, условие выполнено. Если последняя проведенная диагональ не пересекает наш зал, то он не изменился. Если диагональ делит его на две части, то для одной из частей, дверь открывается вовне, эта часть подойдет.

5. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 . Отрезки A_1B_1 , B_1C_1 и C_1A_1 разбили треугольник ABC на четыре треугольника равной площади. Докажите, что A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон треугольника ABC .

Решение. Положим $S_{ABC} = 1$. Обозначим

$$\frac{AC_1}{AB} = x, \quad \frac{BA_1}{BC} = y, \quad \frac{CB_1}{CA} = z.$$

Если у пары треугольников общая высота, то отношение их площадей равно отношению оснований. Тогда:

$$\frac{1}{4} = S_{AB_1C_1} = \frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ACC_1}} \cdot \frac{S_{ACC_1}}{S_{ABC}} \cdot S_{ABC} = (1 - z) \cdot x \cdot 1 = (1 - z)x$$

Аналогично получаем

$$(1 - z)x = (1 - x)y = (1 - y)z = \frac{1}{4}$$
$$xyz(1 - x)(1 - y)(1 - z) = \frac{1}{64}$$

Заметим, что

$$x(1 - x) \leq \left(\frac{x + 1 - x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

причем равенство достигается при $x = \frac{1}{2}$. Тогда условие выполняется только при $x = y = z = \frac{1}{2}$, что и требовалось.