

1. Квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  имеет корни. Верно ли, что трехчлен  $a^3x^2 + b^3x + c^3$  также имеет корни?

**Ответ:** да.

**Решение.** Рассмотрим дискриминант первого трехчлена:

$$\left. \begin{array}{l} D_1 = b^2 - 4ac \geq 0 \\ b^2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow b^6 \geq 64a^3c^3$$

Если  $ac > 0$ , то  $b^6 \geq 64a^3c^3 > 4a^3c^3$ , а иначе  $b^6 - 4a^3c^3 \geq 0$ . В любом случае имеем  $D_2 = (b^3)^2 - 4a^3c^3 \geq 0$ , то есть у второго трехчлена есть корни.

2. Докажите, что

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2023}{2024!} < 1.$$

**Решение.** Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2023}{2024!} &= \frac{2-1}{2!} + \frac{3-1}{3!} + \frac{4-1}{4!} + \dots + \frac{2024-1}{2024!} = \\ &= \frac{2}{2!} - \frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} - \frac{1}{3!} + \frac{4}{4!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{2024}{2024!} - \frac{1}{2024!} = \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots - \frac{1}{2023!} + \frac{1}{2023!} - \frac{1}{2024!} = \\ &= 1 - \frac{1}{2024!} < 1 \end{aligned}$$

3. В треугольнике  $ABC$  биссектрисы углов  $A$  и  $B$  пересекают описанную окружность в точках  $K$  и  $L$ . Отрезки  $AK$  и  $BL$  пересекаются в точке  $X$  и делятся этой точкой в равных отношениях, считая от вершин треугольника. Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.

**Решение.** Из условия следует подобие треугольников  $AХВ$  и  $KХL$  по первому признаку ( $\angle AХВ = \angle KХL$ ). Отсюда получаем, что  $\angle ВАК = \angle LКА$ ,

но  $\angle LKA = \angle ABL$  (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Так как  $AK$  и  $BL$  – биссектрисы, отсюда следует, что  $\angle A = \angle B$ .

4. Можно ли некоторую четверку подряд идущих натуральных чисел разбить на две пары так, чтобы сумма произведений чисел в этих парах была квадратом натурального числа?

**Ответ: Нельзя.**

**Решение.** Предположим противное. Среди четырех подряд идущих чисел одно делится на 4, одно при делении на 4 дает в остатке 1, одно – 2, одно – 3. Кроме того, квадрат целого числа при делении на 4 дает в остатке 0 или 1. Рассмотрим возможные остатки в разбиении на пары:  $0 \cdot 1 + 2 \cdot 3$ ;  $0 \cdot 2 + 1 \cdot 3$ ;  $0 \cdot 3 + 1 \cdot 2$ . При делении на 4 получаем соответственно остатки 2, 3, 2. Противоречие.

5. В загадочной стране города соединены между собой односторонними трассами. Известно, что, выехав из любого города, нельзя вернуться в него, пользуясь этими трассами. Докажите, что можно дополнить систему дорог так, чтобы каждый город был соединен трассой с каждым и при этом новая система удовлетворяла прежнему условию.

**Решение.** Покажем, что если существующая система дорог удовлетворяет условию и два города  $A$  и  $B$  не соединены трассой, то можно построить трассу  $A \rightarrow B$  или  $B \rightarrow A$  так, чтобы получившаяся система дорог по-прежнему удовлетворяла условию. Предположим противное. Тогда после проведения трассы  $A \rightarrow B$  появится замкнутый путь  $B \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_n \rightarrow A \rightarrow B$ . Аналогично после проведения трассы  $B \rightarrow A$  появится замкнутый путь  $A \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \dots \rightarrow D_k \rightarrow B \rightarrow A$ . Но тогда до проведения любой из трасс между  $A$  и  $B$  уже существовал замкнутый путь  $A \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \dots \rightarrow D_k \rightarrow B \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_n \rightarrow A$  (возможно, некоторые вершины  $C_n$  и  $D_m$  совпадают), т. е. существующая система дорог не удовлетворяла условию, так как из  $A$  можно было вылететь и вернуться назад. Противоречие.